2019 冲刺高考最后 1 卷

参考答案与解析

文科数学

1. C　集合 $A=\{x\,|\,y=\lg(x-3)\}=\{x\,|\,x-3>0\}=\{x\,|\,x>3\}$，$B=\{y\,|\,y=2^x,x\in\mathbf{R}\}=\{y\,|\,y>0\}$，$\therefore A\cap B=\{x\,|\,x>3\}$. 故选 C.

2. B　$(1+\mathrm{i})z=3+\mathrm{i}$，$\therefore(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})z=(1-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$，$\therefore 2z=4-2\mathrm{i}$，$\therefore z=2-\mathrm{i}$，$\therefore|\overline{z}+1|=|2+\mathrm{i}+1|=|3+\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. 故选 B.

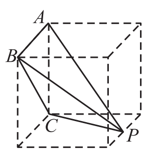
3. C　解不等式 $2x^2-5x-3\geqslant 0$，得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

4. C　小明一天中学习数学的时间为 2 小时，占一天总时间的 $\dfrac{2}{24}=\dfrac{1}{12}$. 故选 C.

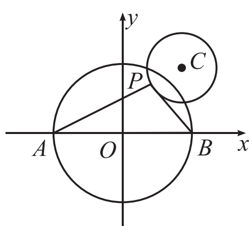
5. B　已知幂函数 $f(x)=x^n$ 的图像过点 $\left(8,\dfrac{1}{4}\right)$，则 $8^n=\dfrac{1}{4}$，则 $n=\log_8\dfrac{1}{4}=-\dfrac{2}{3}$，故幂函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$，若 $f(a+1)<f(3)$，则 $|a+1|>3$，解得 $a<-4$ 或 $a>2$. 故选 B.

6. C　由题意知 $a=35,b=21$；$a=35-21=14,b=21$；$a=14,b=21-14=7$；$a=14-7=7,b=7$. 故选 C.

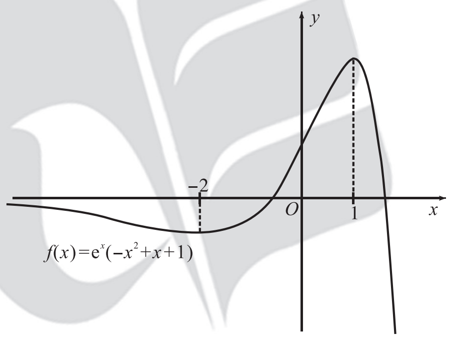
7. D　由正弦定理可得 $\sin C\cos A+\sin A\cos C=-2\sin B\cos B$，即 $\sin(A+C)=-2\sin B\cos B$，所以 $\sin B=-2\sin B\cos B$，又 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos B=-\dfrac{1}{2}$，则 $B=120°$，因为 $a=1$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot c\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，解得 $c=4$，所以 $b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{21}$. 故选 D.



第 8 题答图



第 9 题答图



第 11 题答图

8. C　由题意知该几何体是三棱锥 $P-ABC$，如答图所示，其中正方体的棱长为 4，点 P 是正方体中一条棱的中点，所以 $V_{P\text{-}ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times 4=\dfrac{32}{3}$. 故选 C.

9. B　$\because$ 圆 C：$(x-6)^2+(y-8)^2=1$，$\therefore$ 圆心 $C(6,8)$，半径 $r=1$，要使 $\angle APB>90°$，则圆 O 与圆 C 相交或圆 O 与圆 C 内含（圆 C 在内部），如答图所示，则 $|OC|<R+r$，$\therefore 10<m+1$，$\therefore m>9$. 故选 B.

10. D　由题意知点 M 为 PF 的中点，设抛物线的准线与 x 轴交于点 $A\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$，点 O 为 AF 的中点，则 OM 为 PA 的中位线，所以 $k_{OM}=k_{PA}$，即抛物线上的点 P 与定点 A 连线的斜率的最大值，当 PA 与抛物线相切时，斜率最大，此时 $k_{PA}=1$. 故选 D.

11. A　设切点为 $M(x_0,y_0)$，$\because y=x\mathrm{e}^x$，$\therefore y'=(x+1)\mathrm{e}^x$，$\therefore M$ 处的切线斜率 $k=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}$，则过点 P 的切线方程为 $y=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)+x_0\mathrm{e}^{x_0}$，代入点 P 的坐标，化简得 $m=(-x_0^2+x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}$，$\because$ 过点 $P(1,m)$ 可以作三条直线与曲线 C：$y=x\mathrm{e}^x$ 相切，$\therefore$ 方程 $m=(-x_0^2+x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}$ 有三个不等实根. 令 $f(x)=(-x^2+x+1)\mathrm{e}^x$，求导得到 $f'(x)=(-x^2-x+2)\mathrm{e}^x$，可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,1)$ 上单调递增，在 $(1,$

$+\infty$)上单调递减，如答图所示，故 $f(-2)<m<0$，即 $-\frac{5}{e^2}<m<0$. 故选 A.

12. B　根据弧长公式知 $CA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{3n-2}A_{3n-1}, A_{3n-1}A_{3n}$ 的长度分别为 $2\times\frac{2\pi}{3}, 4\times\frac{2\pi}{3}, 6\times\frac{2\pi}{3}\cdots$ 此数列是以 $\frac{4\pi}{3}$ 为首项、$\frac{4\pi}{3}$ 为公差，项数为 $3n$ 的等差数列，则根据等差数列的求和公式得 $S_n=2(3n^2+n)\pi$. 故选 B.

13. $5\sqrt{2}$

14. $\frac{4^n-1}{3}$　由题意知 $a_n=2^{n-1}$，所以 $a_n^2=4^{n-1}$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}{a_i}^2={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2=4^0+4^1+\cdots+4^{n-1}=\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4^n-1}{3}$.

15. 5π

16. 1　由题意可解得 $k\geqslant 6-4\sqrt{2}$，故正整数 k 的最小值为 1.

17.（Ⅰ）根据题意，点 A 与点 D 关于点 B 对称，$\therefore B$ 点的横坐标为 $\frac{0+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$，

又点 C 与点 D 关于直线 $x=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$ 对称，

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，

解得 $T=\pi$，即 $\omega=1$.

又 $f(0)=\sin\varphi$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=-\sin\varphi$，且 $0<\varphi<\pi$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

又 $f(x)=k-\sin 2x$，$\therefore \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=k-\sin 2x$，

$\therefore k=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

设 $g(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$，画出函数 $g(x)$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图像，

根据题意，$y=k$ 与 $g(x)$ 恰有唯一交点，

故实数 k 应满足 $\left\{k\,\middle|\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant k<\frac{3}{2}\text{或 } k=\sqrt{3}\right\}$.

18.（Ⅰ）根据题中的数据，填写列联表如下：

	家庭成员接受过中等以下教育的户数	家庭成员接受过中等及以上教育的户数	合计
甲村贫困户数	45	10	55
乙村贫困户数	25	20	45
合计	70	30	100

因为 $K^2=\frac{100\times(45\times20-10\times25)^2}{55\times45\times70\times30}=8.129>7.879$，

所以有 99.5%的把握认为贫困与接受教育情况有关.

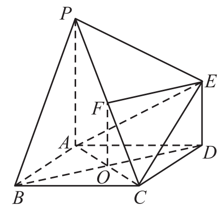
（Ⅱ）根据题意，在抽取的 6 户中，乙村 4 户，甲村 2 户，分别设为 a_1, a_2, a_3, a_4 和 b_1, b_2，

从这 6 户中随机抽取 2 户得到的样本空间为 (a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,a_4)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,a_3)，(a_2,a_4)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,a_4)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)，(b_1,b_2)，样本空间数是 15，

其中这 2 户中恰好为 1 户甲村、1 户乙村的样本数是 8，

因此这 2 户中恰好为 1 户甲村、1 户乙村的概率是 $P=\frac{8}{15}$.

19. (Ⅰ)证明:连接 BD,交 AC 于点 O,设 PC 的中点为 F,连接 OF,EF,如答图所示.



第 19 题答图

$\because O$,F 分别为 AC,PC 的中点,$\therefore OF/\!/PA$,且 $OF=\dfrac{1}{2}PA$,

$\because DE/\!/PA$,且 $DE=\dfrac{1}{2}PA$,$\therefore OF/\!/DE$,且 $OF=DE$,

$\therefore$四边形 $OFED$ 为平行四边形,$\therefore OD/\!/EF$,即 $BD/\!/EF$.

$\because PA\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,$\therefore PA\perp BD$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore BD\perp AC$. $\because PA\cap AC=A$,$\therefore BD\perp$平面 PAC.

$\because BD/\!/EF$,$\therefore EF\perp$平面 PAC.

$\because EF\subset$平面 PCE,$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 PCE.

(Ⅱ)$V=V_{P\text{-}ABC}+V_{C\text{-}ADEP}=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$.

20. (Ⅰ)$\because |F_1F_2|=2\sqrt{3}=2c$,$-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{4}$,

$\therefore c=\sqrt{3}$,$a^2=4$,$b^2=1$,

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,设 $P(4,m)$,

则直线 PA_1,PA_2 的方程分别为 $y=\dfrac{m}{6}(x+2)$,$y=\dfrac{m}{2}(x-2)$,

由$\begin{cases} y=\dfrac{m}{6}(x+2) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 可得$(9+m^2)x^2+4m^2x+4m^2-36=0$,

$\therefore -2+x_M=\dfrac{-4m^2}{9+m^2}$,可得 $x_M=\dfrac{18-2m^2}{9+m^2}$,$y_M=\dfrac{m}{6}(x_M+2)=\dfrac{6m}{9+m^2}$,

由$\begin{cases} y=\dfrac{m}{2}(x-2) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 可得$(1+m^2)x^2-4m^2x+4m^2-4=0$,

$\therefore 2+x_N=\dfrac{4m^2}{1+m^2}$,可得 $x_N=\dfrac{2m^2-2}{1+m^2}$,$y_N=\dfrac{m}{2}(x_N-2)=\dfrac{-2m}{1+m^2}$,

则 $k_{MN}=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{2m}{3-m^2}$,直线 MN 的方程为 $y-\dfrac{-2m}{1+m^2}=\dfrac{2m}{3-m^2}\left(x-\dfrac{2m^2-2}{1+m^2}\right)$,

即 $y=\dfrac{2m}{3-m^2}\left(x-\dfrac{2m^2-2}{1+m^2}\right)-\dfrac{2m}{1+m^2}=\dfrac{2m}{3-m^2}\left(x-\dfrac{2m^2-2}{1+m^2}-\dfrac{3-m^2}{1+m^2}\right)=\dfrac{2m}{3-m^2}(x-1)$,

可得直线 MN 过定点$(1,0)$.

21. (Ⅰ)函数 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2+(x-a)\cos x-\sin x$,

$\therefore g'(x)=x^2-ax+\cos x-(x-a)\sin x-\cos x=x^2-ax-(x-a)\sin x=(x-a)(x-\sin x)$,

令 $g'(x)=0$,解得 $x=a$ 或 $x=0$,

当 $x<0$ 时,$x-\sin x<0$;当 $x\geqslant 0$ 时,$x-\sin x\geqslant 0$.

①若 $a>0$ 时,$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$(0,a)$上单调递减,在$(a,+\infty)$上单调递增,$g(x)$有 2 个极值点,

$\therefore$当 $x=a$ 时,函数有极小值,极小值为 $g(a)=-\dfrac{1}{6}a^3-\sin a$;

当 $x=0$ 时,函数有极大值,极大值为 $g(0)=-a$.

②若 $a<0$ 时,$g(x)$在$(-\infty,a)$上单调递增,在$(a,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,$g(x)$有 2 个极值点,

$\therefore$当 $x=a$ 时,函数有极大值,极大值为 $g(a)=-\dfrac{1}{6}a^3-\sin a$;

当 $x=0$ 时，函数有极小值，极小值为 $g(0)=-a$.

③当 $a=0$ 时，$g'(x)=x(x-\sin x)$，

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值点，故无极值.

（Ⅱ）$\because f'(x_0)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{3}(x_2{}^2+x_1x_2+x_1{}^2)-\dfrac{1}{2}a(x_1+x_2)$，

又 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}a(x_1+x_2)$，

$\therefore f'(x_0)-f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{1}{12}(x_2-x_1)^2\geqslant 0$，

又 $f'(x)$ 在 $\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore x_2>x_0>x_1>\dfrac{a}{2}$ 时，有 $x_0>\dfrac{x_1+x_2}{2}$，

$\therefore x_1+x_2<2x_0$.

22.（Ⅰ）$\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y=0$，

$\therefore$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\sin\theta=0$，

即曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

（Ⅱ）已知点 M 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$，

设直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+t\cos\theta,\\ y=1+t\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）①，

曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-4y=0$②，

联立①②式得 $t^2+2(\cos\theta-\sin\theta)t-2=0$，

$\therefore t_1t_2=-2$，又 $|MA|=2|MB|$，$\therefore t_1=-2t_2$，

$\therefore t_1=2,t_2=-1$ 或 $t_1=-2,t_2=1$，

$\therefore AB$ 的弦长 $|AB|=|t_1-t_2|=3$.

23.（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)+|2x-5|=|x-1|+|2x-5|\geqslant 6$，

当 $x\leqslant 1$ 时，$1-x-2x+5\geqslant 6$，解得 $x\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 0$；

当 $1<x<\dfrac{5}{2}$ 时，$x-1-2x+5\geqslant 6$，解得 $x\leqslant -2$，不成立；

当 $x\geqslant\dfrac{5}{2}$ 时，$x-1+2x-5\geqslant 6$，解得 $x\geqslant 4$，$\therefore x\geqslant 4$.

故不等式的解集是 $\{x|x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 0\}$.

（Ⅱ）$g(x)=|x-a|-|x-3|$，

当 $a\geqslant 3$ 时，$g(x)=\begin{cases}3-a,x\geqslant a,\\ a+3-2x,3<x<a,\\ a-3,x\leqslant 3,\end{cases}$

$\therefore 3-a\leqslant g(x)\leqslant a-3$，

$\because [-1,2]\subseteq A$，$\therefore\begin{cases}3-a\leqslant -1,\\ a-3\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 5$；

当 $a<3$ 时，$a-3\leqslant g(x)\leqslant 3-a$，

$\therefore\begin{cases}a-3\leqslant -1,\\ 3-a\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant 1$.

综上得 a 的取值范围是 $\{a|a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant 5\}$.