2019 冲刺高考最后 1 卷

参考答案与解析

理科数学

一、选择题

1. C 【解析】$A=\{x\mid y=\lg(x-3)\}=\{x\mid x-3>0\}=\{x\mid x>3\}$，$B=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y>0\}$，选 C.

2. B 【解析】$a=2$，$x\in\mathbf{R}$；$a\neq2$，$\Delta<0$，即 $0<a<2$ 时，$x\in\mathbf{R}$，故命题 p：$0<a\leqslant2$，选 B.

3. B 【解析】第一次用“调日法”后得 $\frac{16}{5}$ 是 π 的更为精确的过剩近似值，即 $\frac{31}{10}<\pi<\frac{16}{5}$，第二次用“调日法”后得到 $\frac{47}{15}$ 是 π 的更为精确的不足近似值，即 $\frac{47}{15}<\pi<\frac{16}{5}$，第三次用“调日法”后得到 $\frac{63}{20}$ 是 π 的更为精确的过剩近似值，即 $\frac{47}{15}<\pi<\frac{63}{20}$. 选 B.

4. A 【解析】展开式中常数项为：$-2+C_7^1=5$. 选 A.

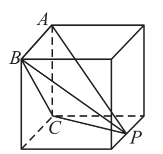
5. C 【解析】易知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为单调递减的奇函数，所以 $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}m>\log_{\frac{1}{4}}(m+2),\\-1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}m\leqslant1,\\-1\leqslant\log_{\frac{1}{4}}(m+2)\leqslant1,\\m>0,\\m+2>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}\leqslant m<2$. 选 C.

6. C 【解析】初始角为 $-\frac{2\pi}{3}$，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=60$，所以，$\omega=\frac{\pi}{30}$，所以，当秒针运动到 M 点时，$x=1\cdot\cos\left[-\frac{2\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{30}t\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{2\pi}{3}\right)$. 选 C.

7. B 【解析】$a_n+a_{n+1}=n$，$a_n\cdot a_{n+1}=c_n$，由 $\begin{cases}a_n+a_{n+1}=n,\\a_1=1\end{cases}$ 易知 $a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2}(n\text{ 为正奇数}),\\\frac{n-2}{2}(n\text{ 为正偶数}),\end{cases}$ 所以，$c_{2n+1}=a_{2n+1}a_{2n+2}=n(n+1)$，故 $b_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. $\therefore T_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. 选 B.

8. B 【解析】$\odot C$：$(x-6)^2+(y-8)^2=1$ 与 $\odot O$：$x^2+y^2=m^2(m>1)$ 位置关系为相交、外切或内含，故 $m+1>10$，$m>9$. 选 B.

9. C 【解析】利用“三线交汇得顶点”的方法，可知该几何体是三棱锥 $P-ABC$，如图所示，其中正方体的棱长为 4，点 P 是正方体其中一条棱的中点，所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4\times4=\frac{32}{3}$. 选 C.



第 9 题图

10. B 【解析】过 E 点作 NL 垂线交 NL 于 P_1，交 $\odot E$ 为 P，则由向量等和线易知 $\lambda+\mu$ 的最小值为 $\frac{5}{4}$. 选 B.

11. B 【解析】$N\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$ 检验即可. 选 B.

12. C 【解析】原不等式 $\Leftrightarrow axe^{1-x}\leqslant\ln x+\frac{1}{x}(x>0)$，当 $a\leqslant0$ 时，由于 $\ln x+\frac{1}{x}\geqslant1$，所以，显然有 $axe^{1-x}\leqslant\ln x+\frac{1}{x}$；当 $a>0$ 时，令 $f(x)=axe^{1-x}-\ln x-\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-x}{e^{x-1}}\left(a+\frac{e^{x-1}}{x^2}\right)$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；$(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)\leqslant0$ 即可，所以 $0<a\leqslant1$；综上：$a\leqslant1$. 选 C.

二、填空题

13. 三

14. 5π 【解析】易知 PE,PC,PB 两两垂直，三棱锥 $B-PCE$ 的外接球的直径为$\sqrt{5}$，故外接球的表面积为 5π.

15. $\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ 【解析】由题意知：$k_{AB}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$k_{A_1B}=-\tan15^\circ=\sqrt{3}-2$，又设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $A_1(-x_1,-y_1)$，

$k_{AB}\cdot k_{A_1B}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$，而$\begin{cases}mx_1^2-ny_1^2=1,\\mx_2^2-ny_2^2=1,\end{cases}$则$\dfrac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\dfrac{m}{n}$，$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times(\sqrt{3}-2)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}=$

$\dfrac{b^2}{a^2}$(其中，a,b 为双曲线实半轴长、虚半轴长)，$\therefore\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$，$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\therefore e=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$.

16. $(4\sqrt{3},2\sqrt{21}]$ 【解析】$\because\dfrac{a}{2R}=\sin A$，$\therefore a=2\sqrt{3}\sin60^\circ=3$. $\therefore b+2c=2R\sin B+4R\sin C=2R(\sin B+2\sin C)=$

$2R\left[\sin B+2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)\right]=2R(2\sin B+\sqrt{3}\cos B)=2\sqrt{21}\sin(B+\theta_0)$，其中锐角 θ_0 满足：$\tan\theta_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 又

$\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\dfrac{\pi}{6}+\theta_0<B+\theta_0<\dfrac{\pi}{2}+\theta_0$，由$\dfrac{\pi}{6}<\theta_0<\dfrac{\pi}{4}$，知：$0<\dfrac{\pi}{2}-\theta_0<\dfrac{\pi}{6}+\theta_0<$

$\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta_0\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_0\right)<\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta_0\right)$，$\therefore\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta_0\right)<\sin(B+\theta_0)\leqslant1$，又$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta_0\right)=\cos\theta_0=$

$\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. $\therefore\dfrac{2}{\sqrt{7}}<\sin(B+\theta_0)\leqslant1$，$\therefore4\sqrt{3}<b+2c\leqslant2\sqrt{21}$.

三、解答题

17. (Ⅰ)当 $n=1$ 时，$a_1=1$；

当 $n\geqslant2$ 时，

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\dfrac{1}{4}[(2n-1)\cdot3^n+1]$，

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=\dfrac{1}{4}[(2n-3)\cdot3^{n-1}+1]$.

两式相减，得 $a_n=3^{n-1}$，

综上可得：$a_n=3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知，$b_n=\dfrac{1}{2\times3^{n-1}-1}\leqslant\dfrac{1}{3^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，

故 $b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1}{3^0}+\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)<\dfrac{3}{2}$，

即 $b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{3}{2}$.

18. (Ⅰ)连接 AC，交 BD 于点 O. 连接 SO.

菱形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，

且 O 是 AC 和 BD 的中点，

因为 $SB=SD=\sqrt{2}$，

所以 $BD\perp SO$，

$\angle SOC$ 是二面角 $S-BD-C$ 的平面角，

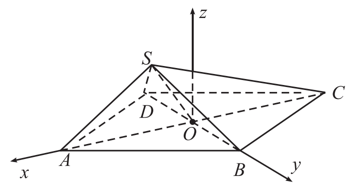
即 $\cos\angle SOC=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\angle SOA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $SO\cap OA=O$，所以 $BD\perp$平面 SAC，$SA\perp BD$.

$\triangle SOA$ 中，由余弦定理知

$SA^2=OA^2+OS^2-2OA\cdot OS\cdot\cos\angle SOA=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2$.

所以 $SA=\sqrt{2}$，即 $OS^2+SA^2=OA^2$，$SA\perp SO$ ，
又 $SO\cap BD=O$ ，所以 $SA\perp$ 平面 SBD.
又 $SA\subset$ 平面 SAB，所以平面 $SAB\perp$ 平面 SBD.
（Ⅱ）如图，分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为 x，y 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



第 18 题图

则点 $O(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AS}=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{CD}=(\sqrt{3},-1,0)$，

$\overrightarrow{CS}=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 SAD、平面 SCD 的法向量，

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AS}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1+y_1=0,\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}x_1-\frac{\sqrt{6}}{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},\sqrt{2})$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{CS}\cdot\boldsymbol{n}_2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2-y_2=0,\\ \frac{4\sqrt{3}}{3}x_2+\frac{\sqrt{6}}{3}z_2=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},-2\sqrt{2})$，

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1\times1+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}+\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})}{\sqrt{6}\times\sqrt{12}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故二面角 $A-SD-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19.（Ⅰ）根据图示，将 2×2 列联表补充完整如下：

	优分	非优分	总计
男生	9	21	30
女生	11	9	20
总计	20	30	50

假设 H_0：该学科成绩与性别无关，

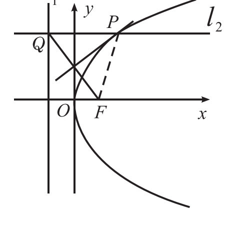
K^2 的观测值 $k=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{50(9\times9-11\times21)^2}{20\times30\times20\times30}=3.125$，

因为 $3.125>2.706$，所以能在犯错误概率不超过 10% 的前提下认为该学科成绩与性别有关.

（Ⅱ）由于有较大的把握认为该学科成绩与性别有关，因此需要将男女生成绩的优分频率 $f=\frac{20}{50}=0.4$ 视作概率. 设从高三年级中任意抽取 3 名学生的该学科成绩中，优分人数为 X，则 X 服从二项分布 $B(3,0.4)$，

所求概率 $P=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\times0.4^2\times0.6+C_3^3\times0.4^3=0.352$.

20.（Ⅰ）由题意，$|PQ|=|PF|$，结合抛物线定义，可知点 P 轨迹是以 l_1 为准线，F 为焦点的抛物线，故曲线 E 的方程为 $y^2=4x$.



第 20 题图（Ⅰ）

（Ⅱ）设直线 AB 的方程为 $x=my+2$，

由 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=4x\end{cases}$

得 $y^2-4my-8=0$.

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $y_1y_2=-8$.

同理，设点 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

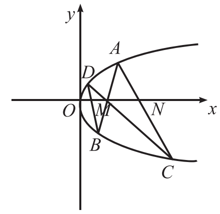
则 $y_3y_4=-8$.

由 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{NC}(\lambda>0)$ 可知 A,N,C 共线,

设直线 AC 的方程为 $x=ny+4$,

由 $\begin{cases}x=ny+4,\\ y^2=4x\end{cases}$

得 $y^2-4ny-16=0$, $y_1y_3=-16$.



第 20 题图(Ⅱ)

又 $k_1=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\dfrac{y_1-y_3}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_3^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_3}$,

$k_2=\dfrac{y_2-y_4}{x_2-x_4}=\dfrac{y_2-y_4}{\dfrac{y_2^2}{4}-\dfrac{y_4^2}{4}}=\dfrac{4}{y_2+y_4}=\dfrac{4}{\dfrac{-8}{y_1}+\dfrac{-8}{y_3}}=\dfrac{8}{y_1+y_3}$,

故 $k_1=\dfrac{1}{2}k_2$,

所以存在常数 $\mu=\dfrac{1}{2}$,使 $k_1=\dfrac{1}{2}k_2$.

21. (Ⅰ) $f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-1$. 当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$ 解得 $x=\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}$,当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. 综上,$a\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;$a>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

(Ⅱ) 引理 1:$\forall x>0$, $\mathrm{e}^x>x+\dfrac{x^2}{2}$.

证明:令 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-\dfrac{x^2}{2}(x>0)$,则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-1-x$, $g''(x)=\mathrm{e}^x-1>0(x>0)$, $\therefore g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $g'(0)=0$, $\therefore g'(x)>0(x>0)$. $\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $g(0)=1$, $\therefore g(x)>0(x>0)$.

引理 2:$\forall x\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $\dfrac{2-2x}{x^2}-\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}>0$.

证明:$\dfrac{2-2x}{x^2}-\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2-2x}{x}+\ln x\right)=\dfrac{1}{x}\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-2\right)$.

令 $h(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}-2$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x-2}{x^2}<0$, $\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减,

$\therefore h(x)>h\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-1+2\mathrm{e}-2=2\mathrm{e}-3>0$,故得证.

下求实数 a 的取值范围. 由(Ⅰ)知要使 $f(x)$ 有两个零点,$a>0$,

此时,$f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}\left(1-\ln\dfrac{1}{a}\right)$. 令 $f(x)_{\min}<0$,解得 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

又 $f(0)=1$, $\therefore\exists x_1\in\left(0,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}\right)$,使 $f(x_1)=0$.

由引理 1 和引理 2 知:$\forall a\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $\exists x_0>\dfrac{2(1-a)}{a^2}\left(>\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}\right)$,使 $f(x_0)=\mathrm{e}^{ax_0}-x_0>\dfrac{(ax_0)^2}{2}+ax_0-x_0=\dfrac{a^2x_0^2}{2}-(1-a)x_0=x_0\left[\dfrac{a^2}{2}x_0-(1-a)\right]>x_0[(1-a)-(1-a)]=0$.

$\therefore\exists x_2\in\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a},x_0\right)$,使 $f(x_2)=0$.

综上:$0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

22. (Ⅰ)依题意,曲线 $C:(x-2)^2+y^2=4$,故 $x^2+y^2-4x=0$,

即 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$,即 $\rho=4\cos\theta$,$\cos\theta=\frac{\rho}{4}$.

(Ⅱ)将直线 l 的参数方程$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$代入 $x^2+y^2-4x=0$ 中,

化简可得 $t^2+3\sqrt{2}t+1=0$,设 M,N 所对应的参数分别为 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=-3\sqrt{2}$,$t_1t_2=1$,故$\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AN|}=\frac{|AM|+|AN|}{|AM|\cdot|AN|}=\left|\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}\right|=3\sqrt{2}$.

23. (Ⅰ)当 $a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=|2x+4|+\left|x-\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}-3x-\frac{7}{2},x<-2,\\ x+\frac{9}{2},-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 3x+\frac{7}{2},x>\frac{1}{2}.\end{cases}$

当 $x<-2$ 时,原不等式可化为$-3x-\frac{7}{2}<4$,解得 $x>-\frac{5}{2}$,故$-\frac{5}{2}<x<-2$;

当$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时,原不等式可化为 $x+\frac{9}{2}<4$,解得 $x<-\frac{1}{2}$,故$-2\leqslant x<-\frac{1}{2}$;

当 $x>\frac{1}{2}$时,原不等式可化为 $3x+\frac{7}{2}<4$,解得 $x<\frac{1}{6}$,此时不等式无解.

综上所述,不等式 $f(x)<4$ 的解集为$\left\{x\left|-\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}\right.\right\}$.

(Ⅱ)∵$f(x)=|2x+4|+a|2x-1|$,令 $x=0$,得 $f(0)=4+a$.

令 $f(x)=0$,得 $x=\frac{a+4}{2a-2}$或 $x=\frac{a-4}{2a+2}$,所以 $f(x)$的图像与坐标轴的三个交点构成的三角形面积为

$S=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{a-4}{2a+2}-\frac{a+4}{2a-2}\right)(a+4)\right|=\frac{5}{2}\left|\frac{a(a+4)}{1-a^2}\right|=\frac{10}{3}$.

∵$-4<a<-1$,∴$S=\frac{5a(a+4)}{2(1-a^2)}=\frac{10}{3}$,化简得 $7a^2+12a-4=0$,

解得 $a=-2$ 或 $a=\frac{2}{7}$(舍去),故 $a=-2$.